Material de apoio - Números complexos

Introdução

Dado a equação, qual o valor de X?

$$
\begin{aligned}
&2.x^2 + 8 = 0\\
&2.x^2 = -8\\
&x^2 = -\frac{8}{2}\\
&x^2 = -4\\
&x = \pm\sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

Porém, não existem raízes reais para números negativos, daí a necessidade de criar um novo número, infelizmente chamado de imaginário.

$$j = \sqrt{-1}$$

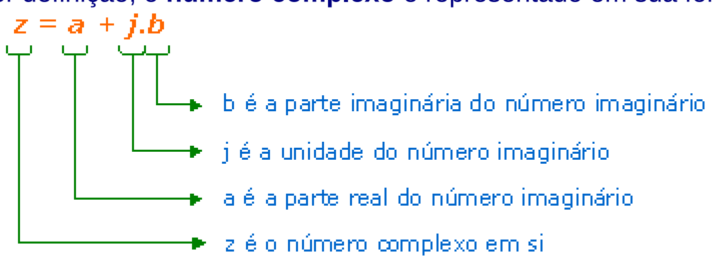
O que nos dá um novo resultado:

$$
\begin{aligned}
&x = \pm\sqrt{4.(-1)}\\
&x = \pm\sqrt{4}.\sqrt{-1}\\
&x = \pm 2.\sqrt{-1}\\
&x = \pm 2j
\end{aligned}
$$

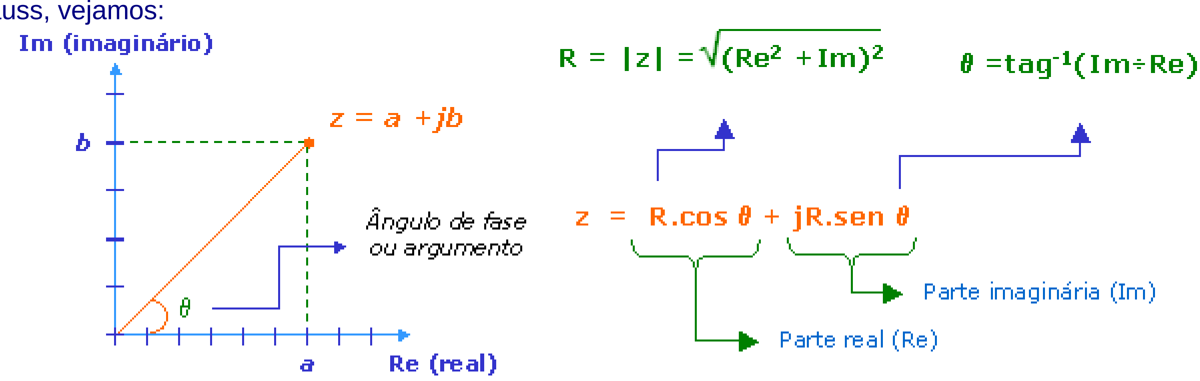
Onde j é a unidade do número imaginário. Em algumas situações, usa-se i, porém, em engenharia isso pode acarretar confusão com a intensidade da corrente elétrica.

Representações do número complexo

Forma retangular → Por definição, o **número complexo** é representado em sua forma retangular, ou seja:



Forma trigonométrica → O **número complexo**, também pode ser representado no plano de Argand Gauss, vejamos:



Forma exponencial → Utilizando o teorema de Euller, e = cosθ + j.senθ, teremos o **número complexo** representado na forma exponencial.

$$z = R.e^{j\theta}$$

$$\theta = tag^{-1}(Im \div Re)$$

$$R = |z| = \sqrt{(Re^2 + Im)^2}$$

Forma polar → A última representação é a forma polar e esta, pode ser facilmente obtida utilizando as formas anteriores.

$$\theta = tag^{-1}(Im \div Re)$$

$$z = R\angle\theta$$

$$R = |z| = \sqrt{(Re^2 + Im)^2}$$

Praticando:

1) Exprimir os números z1=20∠50º e z2=110∠-85º nas formas, exponencial, trigonométrica e retangular.

Solução:

$$z1 = 20\angle 50^\circ$$
$$z1 = 20.e^{j50}$$
$$z1 = 20.\cos 50^\circ + j20.\mathrm{sen}\,50^\circ$$
$$z1 = 12{,}86 + j15{,}32$$

$$z2 = 110\angle -85^\circ$$
$$z2 = 20.e^{-j85}$$
$$z2 = 110.\cos(-85^\circ) + j110.\mathrm{sen}(-85^\circ)$$
$$z2 = 9{,}59 - j109{,}58$$

2) Representar os números z3 = (20 – j3) e z4 = (-20 + j13) nas formas, exponencial, trigonométrica e polar.

3) Representar os números z5 = $20.e^{j20^o}$ e z6 = $12.e^{j(-32)^o}$ nas formas, trigonométrica, retangular e polar.

4) Exprimir os números z7=24∠-50º e z8=11∠-5º nas formas, exponencial, trigonométrica e retangular.

Operações básicas com complexos na forma retangular

Soma:

$$z = (a + jb) + (c + jd)$$
$$z = (a + d) + j.(b + d)$$

Subtração:

$$z = (a + jb) - (c + jd)$$
$$z = (a - d) + j.(b - d)$$

Multiplicação:

$$z = (a + jb).(c + jd)$$
$$z = a.c + j.da + jbc + j.j.b.d$$ → lembrando que: ***j² = -1***
$$z = (a.c - bd) + (da + bd).j$$

Divisão:

$$z = \frac{(a + jb)}{(c + jd)}$$
$$z = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} \cdot \frac{(c - jd)}{(c - jd)}$$
$$z = \frac{(a.c + bd) + (bc - da).j}{c^2 + d^2}$$

Nota: O conjugado é o inverso do número imaginário, em nosso material, por facilidade de escrita, utilizaremos um asterisco para indicar o conjugado. Exemplo:

$$z = a + jb$$
$$\therefore$$
$$z^* = a - jb$$

onde: z* se lê conjugado de z

Praticando...

5- Sabendo-se que, z1 = (20 – j3) e z2 = (-20 + j13).
a) qual a soma (z1+z2);
b) a subtração (z1 – z2);
c) o produto (z1. z2) e;
d) o quociente (z1÷z2).

a) Solução:

$$z = (20 - j3) + (-20 + j13)$$
$$z = (20 - 20) + (-j3 + j13)$$
$$z = 0 + j10$$

b) Solução:

$$z = (20 - j3) - (-20 + j13)$$
$$z = (20 + 20) + (-j3 - j13)$$
$$z = 40 - j16$$

c) Solução:

$$z = (20 - j3).(-20 + j13)$$
$$z = (20.-20) + (20.j13) + (-j3.-20) + (-j3 + j13)$$
$$z = -400 + j260 + j60 + 39$$
$$z = -361 + j320$$

d) Solução:

$$z = \frac{(20 - j3)}{(-20 + j13)} \cdot \frac{(-20 - j13)}{(-20 - j13)}$$
$$z = \frac{(20.-20) + (20.-j13) + (-j3.-20) + (-j3.-j13)}{400 + 169}$$
$$z = \frac{(-400 - 39) + (-j60 + j260)}{569}$$
$$z = \frac{-439 + j200}{569}$$
$$z = -0{,}77 + j0{,}35$$

6- Sabendo-se que, z3 = (21 + j30) e z4 = (24 + j33).
- e) qual a soma (z3+z4);
- f) a subtração (z3 – z4);
- g) o produto (z3. z4) e;
- h) o quociente (z3÷z4).

7- Sabendo-se que, z5 = (0 + j30) e z6 = (33 +0j).
- i) qual a soma (z5+z6);
- j) a subtração (z5 – z6);
- k) o produto (z5. z6) e;
- l) o quociente (z5÷z6).

Operações utilizando a forma polar

Soma:

z = a∠θ1º + b∠θ2º (Não resolve, deve converter para retangular).

Subtração:

z = a∠θ1º - b∠θ2º (Não resolve, deve converter para retangular).

Multiplicação:

z = a∠θ1º. b∠θ2º

z = (a.b)∠(θ1+ θ2)º

Divisão:

z = (a∠θ1º) ÷ (b∠θ2º)

z = (a÷b)∠(θ1- θ2)º

Praticando...

8- Qual resultado expresso em polar, sabendo-se que z1 = (200∠30º) e z2 = 20∠20º.
- a) qual a soma (z1+z2);
- b) a subtração (z1 – z2);
- c) o produto (z1. z2) e;
- d) o quociente (z1÷z2).

a) Solução:

$$z = z1 + z2$$
$$z1 = 200.\cos 30^o + 200.\text{sen } 30^o$$
$$z1 = 173{,}21 + j100$$
$$z2 = 20.\cos 20^o + 20.\text{sen } 20^o$$
$$z2 = 18{,}79 + j6{,}84$$
$$z = (173{,}21 + j100) + (18{,}79 + j6{,}84)$$
$$z = 192 + j106{,}84$$

Exprimindo em polar

$$R = \sqrt{192^2 + 106{,}84^2}$$
$$R = 219{,}72$$
$$\theta = tag^{-1}\left(\frac{106{,}84}{192}\right)$$
$$\theta = 29{,}09^o$$
$$\therefore$$
$$z = 219{,}72\angle 29{,}09^o$$

b) Solução:

$$z = z1 - z2$$
$$z1 = 200.\cos 30^o + 200.\text{sen}\,30^o$$
$$z1 = 173{,}21 + j100$$
$$z2 = 20.\cos 20^o + 20.\text{sen}\,20^o$$
$$z2 = 18{,}79 + j6{,}84$$
$$z = (173{,}21 + j100) - (18{,}79 + j6{,}84)$$
$$z = 154{,}42 + j93{,}16$$

Exprimindo em polar

$$R = \sqrt{154{,}42^2 + 93{,}16^2}$$
$$R = 180{,}34$$
$$\theta = tag^{-1}\left(\frac{93{,}16}{154{,}42}\right)$$
$$\theta = 31{,}1^o$$
$$\therefore$$
$$z = 180{,}34\angle 31{,}1^o$$

c) Solução:

$$z = z1.z2$$
$$z = 200\angle 30^o.20\angle 20^o$$
$$z = 4000\angle(30+20)^o$$
$$z = 4000\angle 50^o$$

d) Solução:

$$z = \frac{z1}{z2}$$
$$z = \frac{200\angle 30^o}{20\angle 20^o}$$
$$z = 10\angle(30-20)^o$$
$$z = 10\angle 10^o$$

Praticando...

9- Qual resultado expresso em polar, sabendo-se que z3 = (24∠-35º) e z4 = -24∠12º.
- a) qual a soma (z3+z4);
- b) a subtração (z3 – z4);
- c) o produto (z3. z4) e;
- d) o quociente (z3÷z4).

10- Qual resultado expresso em polar, sabendo-se que z5 = (-4∠-50º) e z6 = -4∠-12º.
- a) qual a soma (z5+z6);
- b) a subtração (z5 – z6);
- c) o produto (z5. z6) e;
- d) o quociente (z5÷z6).

Operações utilizando a forma exponencial

Soma:

$z = a.e^{J\theta 1^o} + b.e^{J\theta 2^o}$ (Não resolve, deve converter para retangular).

Subtração:

$z = a.e^{J\theta 1^o} - b.e^{J\theta 2^o}$ (Não resolve, deve converter para retangular).

Multiplicação:

$z = a.e^{J\theta 1^o} - b.e^{J\theta 2^o}$

$z = a.b.e^{J(\theta 1+\theta 2)^o}$

Divisão:

z = a.e $^{J\theta1^o}$ ÷ b.e $^{J\theta2^o}$
z = (a÷b).e $^{J(\theta1-\theta2)^o}$

Praticando...

11- Qual resultado expresso em exponencial, sabendo-se que z1=10.e $^{J21^o}$ e z2=14.e $^{J22^o}$
a) qual a soma (z1+z2);
b) a subtração (z1 – z2);
c) o produto (z1. z2) e;
d) o quociente (z1÷z2).

a) Solução:

$$z = z1 + z2$$
$$z1 = 10.\cos 21^o + 10.\text{sen}\, 21^o$$
$$z1 = 9{,}34 + j3{,}58$$
$$z2 = 14.\cos 22^o + 14.\text{sen}\, 22^o$$
$$z2 = 12{,}98 + j5{,}24$$
$$z = (9{,}34 + j3{,}58) + (12{,}98 + j5{,}24)$$
$$z = 22{,}32 + j8{,}82$$

Exprimindo em exponencial

$$R = \sqrt{22{,}32^2 + 8{,}82^2}$$
$$R = 23{,}99$$
$$\theta = tag^{-1}\left(\frac{8{,}82}{22{,}32}\right)$$
$$\theta = 21{,}56^o$$
$$\therefore$$
$$z = 23{,}99e^{j21{,}56^\circ}$$

b) Solução:

$$z = z1 + z2$$
$$z1 = 10.\cos 21^o + 10.\text{sen}\, 21^o$$
$$z1 = 9{,}34 + j3{,}58$$
$$z2 = 14.\cos 22^o + 14.\text{sen}\, 22^o$$
$$z2 = 12{,}98 + j5{,}24$$
$$z = (9{,}34 + j3{,}58) - (12{,}98 + j5{,}24)$$
$$z = -3{,}64 - j1{,}66$$

Exprimindo em exponencial

$$R = \sqrt{(-3{,}64)^2 + (-1{,}66)^2}$$
$$R = 4$$
$$\theta = tag^{-1}\left(\frac{-1{,}66}{-3{,}64}\right)$$
$$\theta = -155{,}5^o$$
$$\therefore$$
$$z = 4e^{-j155{,}5}$$

c) Solução:

$$z = 10e^{j21^\circ}.14e^{j22^\circ}$$
$$z = (10.14)e^{j(21^\circ + 22^\circ)}$$
$$z = 140e^{-j43^\circ}$$

d) Solução:

$$z = \frac{z1}{z2}$$
$$z = \frac{10.e^{j21^\circ}}{14.e^{j22^\circ}}$$
$$z = 0{,}71.e^{j(21^\circ - 22)^\circ}$$
$$z = 0{,}71.e^{-j1^\circ}$$

12- Qual resultado expresso em exponencial, sabendo-se que $z1=21.e^{J10º}$ e $z2=41.e^{J25º}$

a) qual a soma (z1+z2);
b) a subtração (z1 – z2);
c) o produto (z1. z2) e;
d) o quociente (z1÷z2).

13- Qual resultado expresso em exponencial, sabendo-se que $z1=5.e^{J28º}$ e $z2=4.e^{J32º}$

a) qual a soma (z1+z2);
b) a subtração (z1 – z2);
c) o produto (z1. z2) e;
d) o quociente (z1÷z2).

"Quem olha para fora, sonha; quem olha para dentro, desperta."
(Carl Young)

www.clubedaeletronica.com.br